CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR ANNÉE 1986

EPREUVE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

(Durée : 1 h 30 - coefficient : 3)

---==oOOo==---

On considère l'équation différentielle :

$$y' = x^2 + 2y^2 \qquad (1)$$

On se propose de montrer que cette équation admet une solution $x \longmapsto y(x)$ définie au moins sur $\left[-1, 1\right]$ et vérifiant $y(0) = 0$

On utilise la suite des polynômes $\{y_n\}$ déterminés par:

$$y_0(x) = \frac{x^3}{3} \quad \text{et} \quad y_n(x) = \frac{x^3}{3} + 2\int_0^x y_{n-1}^2 (t)dt$$

On posera $\delta_n = y_n - y_{n-1}$

1) Expliciter $y_1(x)$, $y_2(x)$. Calculer le degré de y_n et la valuation de δ_n

2) Pour tout $x \in \left[0,1\right]$. Montrer que $0 \leqslant y_n(x) \leqslant \frac{2}{5} x^3$ et que $0 \leqslant \delta_n(x) \leqslant \delta_n(1)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$

3) En déduire que sur $\left[0,1\right]$ la suite des fonctions $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction que l'on désignera par y sur $\left[0,1\right]$

Montrer que y est continue et qu'elle vérifie (1). Peut-on étendre à $\left[-1, 1\right]$ les résultats précédents ?

4) On se propose de calculer une valeur approchée de y (1) avec la meilleure approximation.

a) Calculer une valeur approchée de $y_2(1)$ avec six décimales exactes.

b) Montrer que pour tout polynôme P(x) à coefficients positifs dont la valuation est n on a :

$$0 < \int_0^1 P(t)dt < \frac{1}{n+1} P(1)$$

c) En déduire que $\delta_n(1) < \frac{4}{5(4n+3)} \delta_{n-1}(1)$

En utilisant cette inégalité achever le calcul.

5) Effectuer le changement de fonction inconnue

$$z = e^{-2\int_0^x y(t)dt}$$

dans l'équation (E) : $y' = x^2 + 2y^2$

on obtient une équation (E_1).

a) En utilisant l'existence d'une solution z de (E_1) développable en série entière, retrouver l'existence d'une solution y de (E) définie au voisinage de 0 et vérifiant y (0) = 0 . On admet qu'une telle solution est unique.

b) En utilisant l'expression de y sous la forme trouvée en (a) (quotient de deux séries entières) montrer que la plus petite valeur positive de x pour laquelle y (x) n'est pas définie (discontinue) vérifie :

$$1{,}68 < x_0 < 1{,}69$$